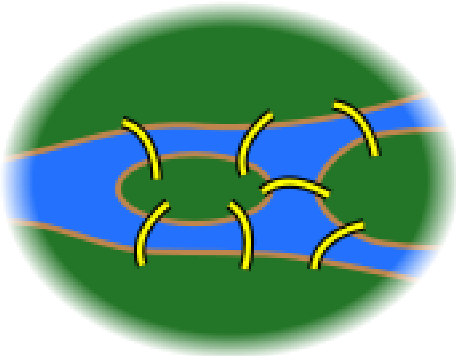
Los siguientes ejercicios se resuelven de forma más rápida y elegante usando un diagrama. En algunos, el diagrama será más explícito. Otros aceptarán varios diagramas complementarios. Aunque seas capaz de resolverlos sólo con cuentas, se recomienda que busques el mejor diagrama que simplifique el problema.

A modo de introducción, empezaremos con algunos que ya muchos conoceréis.

Introducción 1. (Suma de Gauss) Prueba que para todo n natural se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

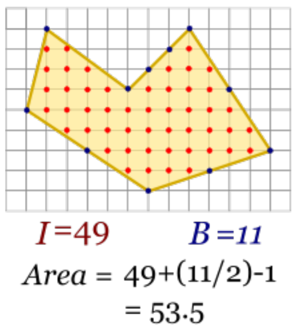
Introducción 2. (Puentes de Königsberg) En la ciudad de Königsberg hay 7 puentes dispuestos como en la figura siguiente.



¿Es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

El siguiente teorema podrá usarse en algunos de los ejercicios.

Teorema. (de Pick) Sea P un polígono dibujado en el plano, de tal forma que todos sus vértices tienen coordenadas enteras $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Si B es el número de puntos enteros en el borde, e I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área del polígono se puede calcular con la fórmula $A(P) = I + \frac{B}{2} - 1$.



Problema 1. En un colgante de $4n$ perlas hay tantas perlas negras como blancas. Se pregunta si es siempre posible cortar el colgante en dos trozos (con dos cortes de tijera) de tal forma que en cada trozo queden exactamente tantas perlas negras como blancas.

Problema 2. Fijado $a \in \mathbb{N}$, encuentra, para cada $k = 1, ..., 2a$, la cantidad de pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ que son solución a **alguna** de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} i + j = 2a - k \\ i + j = 2a - k - 1 \end{cases}$$

(Nota: Aquí $\mathbb{N}$ incluye al 0.)

Problema 3. ¿Cuántas formas hay de pagar 2.50 euros con monedas de 10, 20 y 50 céntimos?

Problema 4. ¿Cuántos caballos caben en un tablero de ajedrez de manera que ninguno ataque a ningún otro?

Problema 5. Una hormiga empieza en una cara F de un octaedro. Cada minuto, se mueve hacia una de las caras adyacentes a la que se encuentra con igual probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que la hormiga se encuentre en la cara F a los n minutos?

Problema 6. Sea $n \geq 3$ y entero. Prueba que podemos encontrar n puntos en el plano tales que la distancia entre dos cualesquiera es irracional, y tales que tres cualesquiera forman un triángulo de área racional (no nula).

Problema 7. Empieza con un grafo completo K_n. Elige un ciclo de tamaño 4, elige una arista cualquiera del ciclo y elimínala.

Para cada $n \geq 4$, encuentra el número mínimo de aristas con las que podemos quedarnos repitiendo ese proceso una y otra vez.

(*Un grafo es completo si cada par de vértices está conectado con una arista. Se dice K_n al grafo completo de n nodos.*)

Problema 8. En Port Aventura hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A. Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero, ..., el último (décimo) vigila al primero.

Demostrar que también se pueden numerar de este modo 11 agentes cualesquiera.